SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

A. CAVALLUCCI

REGOLARITA' NEI PROBLEMI DI CONTROLLO PER INCLUSIONI DIFFERENZIALI

26 MAGGIO 1988

Ci proponiamo di esporre alcuni risultati di Clarke-Loewen [2] sulla regolarità della funzione $\alpha \to V(\alpha)$ soluzione del problema

(P_α) $\min\{f(T,x(o),x(T),\alpha) \mid x(\cdot):[0,T]\to R^n$ assol. cont.

$\dot{x}(t) \in F(x(t),\alpha)$ per quasi ogni $t \in [0,T]$,

$x(t) \in X$, $(T,x(o),x(T),\alpha) \in S\}$

Il risultato principale fornisce una formula di rappresentazione per il gradiente generalizzato ∂V. Da questa formula si ottengono poi varie conseguenze sulla regolarità di V e sulla controllabilità locale del sistema

$$\dot{x} \in F(x).$$

Supponiamo soddisfatte le seguenti ipotesi:

(H1) $R^n \supset X$ chiuso, $\varepsilon > 0$,

$R^n x R^n \supset X x \varepsilon B \ni (x,\alpha) \to F(x,\alpha) \neq \emptyset$ compatto convesso $\subset R^n$;

(H2) F è localmente lipschitziana su $X x \varepsilon B$;

(H3) esistono le costanti $c \geq o$, $k \geq o$ tali che

$F(x,\alpha) \subset (k|x|+c)B$, $\forall (x,\alpha) \in X x \varepsilon B$;

(H4) $R x R^n x R^n x R^m \supset S$ chiuso, e $\{(t,x) \in R x R^n \mid \exists (y,\alpha) \in R^n x R^m: (t,x,y,\alpha) \in S\}$ è compatto.

H5) $f: S \to R$ è localmente lipschitziana;

(H6) $x \in X,\ |\alpha| \leq \varepsilon,\ (t,x,x,\alpha) \in S \Rightarrow t \neq 0$;

(H7) esiste $V(o)$ finito e ogni $x(\cdot)$ soluzione di (P_0) assume i valori in $\mathrm{int}(X)$;

(H8) per ogni $x(\cdot):[0,T] \to \mathrm{int}(X)$ soluzione di (Po), la funzione

$$S \ni (t,x,y,\alpha) \to N_S(t,x,y,\alpha)$$

è chiusa nel punto $(T,x(0),\ x(T),0)$;

(H9) per $M^\lambda(Y)$ definito sotto si ha

$$(p(\cdot),\ q(\cdot)) \in M^\circ(Y),\ q(0) = 0 \Rightarrow p(\cdot) \equiv 0.$$

Abbiamo indicato con $B = \{x|\ |x|<1\}$ la sfera unità aperta sia in R^n che in R^m e con $N_S(u)$ il *cono normale* a S nel suo punto u [1]. Per il seguito è conveniente la seguente definizione di $N_S(u)$: posto

$$PN_S(u) = \{v|\ \exists M>0,\ \forall u' \in S:\ \langle v,u'-u\rangle \leq M|u'-u|^2\},$$

si ha $v \in PN_S(u)$ se e solo se, per ogni $\delta>0$ abbastanza piccolo, u è l'unico punto di S di minima distanza da $u+\delta v$;
si pone

$$N_S(u) = \overline{\mathrm{conv}}\{\lim_{k\to\infty} v_k |\ \exists u_k \in S:\ u_k \to u,\ \ v_k \in PN_S(u_k)\},$$

dove conv E indica l'involucro convesso dell'insieme E e $\overline{\mathrm{conv}}$ E la sua chiusura.

Data la funzione

$$g : R^\nu \to]-\infty, +\infty],$$

se $g(x) \in R$ e se l'epigrafico

$$\text{epig} = \{(x,r) \in R^\nu \times R \mid r \geq g(x)\}$$

è localmente chiuso in $(x,g(x))$, si definisce il *gradiente generalizzato*

$$\partial g(x) = \{p \in R^\nu \mid (p,-1) \in N_{\text{epig}}(x,g(x))\}$$

e il *gradiente generalizzato asintotico*

$$\partial^\infty g(x) = \{p \in R^\nu \mid (p,0) \in N_{\text{epig}}(x,g(x))\}$$

$\partial^\infty g(x)$ è un cono convesso chiuso contenente 0 e si ha la seguente

Proposizione 1. Sono equivalenti le affermazioni

a) $\partial g(x) \neq \emptyset$ e limitato;

b) g è lipschitziana in un intorno di 0 e $\partial g(x)$ coincide con l'usuale gradiente generalizzato;

c) $\partial^\infty g(x) = \{0\}$.

Questa è la Proposizione 2.9.7 di [1].

Osserviamo che, se S è chiuso e

$$\rho_S(u) = \inf\{|v-u| \mid v \in S\},$$

allora ρ_S è lipschitziana e si ha [1]

$$N_S(u) = \overline{\bigcup_{t \geq o} t\partial\rho_S(u)}.$$

Indichiamo con $W(a,b;R^\nu)$ lo spazio delle funzioni $\phi:[a,b] \to R^\nu$ assoluta

mente continue e poniamo

$$H(x,\alpha,p) = \max\{\langle p,v\rangle \mid v \in F(x,\alpha)\},$$

$$Y = \{y(\cdot) \in W(0,T;R^n) \mid y(\cdot) \text{ risolve } (P_0)\}$$

Indichiamo con $M^\lambda(y(\cdot))$ l'insieme delle coppie $(p(\cdot),q(\cdot))$ che verificano le seguenti condizioni a)-c)

a) $(p(\cdot),\ q(\cdot)) \in W(0,T;R^n x R^m)$ e

$$(-\dot{p}(t),\ -\dot{q}(t),\ \dot{y}(t)) \in \partial H(y(t),0,p(t)) \quad \text{q.d. su } (0,T);$$

b) esiste una costante h tale che

$$H(y(t),0,p(t)) = h \qquad \text{su } [0,T] \ ;$$

c) $(h,p(o),\ -p(T),\ -q(T)) \in \lambda\partial f(T,y(o),y(T),0) + N_S(T,y(0),\ y(T),0)$

e poniamo infine

$$M^\lambda(Y) = \bigcup_{y(\cdot)\in Y} M^\lambda(y(\cdot)),$$

$$Q^\lambda[y(\cdot)] = \{-q(0) \mid (p(\cdot),q(\cdot)) \in M^\lambda(y(\cdot))\},$$

$$Q[M^\lambda(Y)] = \bigcup_{y(\cdot)\in Y} Q^\lambda[y(\cdot)\}.$$

Se

$$V(\alpha)= \inf\{f(T,x(0),x(T),\alpha)\,|\,x(\cdot)\in W(0,T;X),\dot{x}(t)\in F(x(t),\alpha) \text{ q.d.},$$

$$(T,x(0),x(T),\alpha)\in S\},$$

allora si ha il seguente

Teorema 1. Sotto le ipotesi (H1)-(H9), esiste $\delta>0$ tale che, se $|\alpha|\leq\delta$, allora V è inferiormente semicontinua in α e se $V(\alpha)<\infty$, allora si ha anche $V(\alpha) = \min\{\ldots\}$. Si ha inoltre

$$\partial^\infty V(0) = \overline{\mathrm{conv}\{Q[M^1(Y)]\cap\partial V(0) + Q\,[M^0(Y)]\cap\partial^\infty V(0)\}}$$

e, se il cono $Q[M^0(Y)]$ è puntato (*), si può omettere il segno di chiusura nella formula precedente e si ha inoltre

$$\partial^\infty V(0) = \mathrm{conv}\{Q[M^0(Y)]\cap\partial^\infty V(0)\}.$$

Prima di indicare i punti principali della dimostrazione di questo teorema vediamo qualche conseguenza.

Corollario 1. Se $Q[M^0(Y)] = \{0\}$, allora V è finita e lipschitziana in un intorno di 0.

Infatti si ha $\partial^\infty V(0) = \{0\}$ e quindi la tesi, per la Proposizione 1.

Corollario 2. Supposto $Q[M^0(Y)] = \{0\}$, si ha per ogni $u\in R^n$

(*) Ossia: $q_1,\ldots,q_k\in Q[M^0(Y)]$, $q_1+\ldots+q_k=0 \Rightarrow q_1=\ldots=q_k=0$

$$V^+(0;u) = \limsup_{t\to o+} \frac{V(tu)-V(0)}{t} \leqq \inf_{y(\cdot)\in Y} \sup\langle u, Q[M^1(y(\cdot))]\rangle,$$

$$V_+(0;u) = \liminf_{t\to o+} \frac{V(tu)-V(0)}{t} \geqq \inf_{y(\cdot)\in Y} \inf\langle u, Q[M^1(y(\cdot))]\rangle$$

e se inoltre supponiamo $Q[M^1(y(\cdot))] = \{Q(y(\cdot))\}$ per ogni $y(\cdot)\in Y$, allora esiste

$$V'(0;u) = \lim_{t\to o+} \frac{V(tu)-V(o)}{t} = \inf_{y(\cdot)\in Y} \langle u, Q(y(\cdot))\rangle$$

Corollario 3. Se $Y = \{y(\cdot)\}$, $Q[M^0(y(\cdot))] = \{0\}$ e $Q[M^1(y(\cdot))]=\{\zeta\}$, allora V è strettamente differenziabile in 0 e si ha

$$DV(0) = \zeta.$$

Le dimostrazioni dei corollari 2 e 3 si possono trovare in [1].

Corollario 4. Se $y(\cdot)\in W(0,T;\text{int } X)$ risolve (P_0), allora esistono $\lambda\in\{0,1\}$ e $(p(\cdot),q(\cdot)\in M^\lambda(y(\cdot))$ tali che

$$\lambda + |q(0)| > 0.$$

Se $Y = \{y(\cdot)\}$, questo segue dal Teorema 1. Infatti, se $Q[M^0(Y)] = q(0)\neq 0$, allora la nostra affermazione è vera con $\lambda = 0$; se $Q[M^0(Y)] = \{0\}$, allora si ha

$$\partial^\infty V(0) = \{0\},$$

$$\emptyset \neq \partial V(0) = Q[M^1(Y)]\cap\partial V(0)$$

e quindi $Q[M^1(Y)] \neq \emptyset$ e la nostra affermazione vale con $\lambda=1$.

Per la dimostrazione nel caso generale si può procedere come nella dimostrazione del successivo Lemma 1.

Per la dimostrazione del Teorema 1 è utile richiamare da [1] alcuni risultati relativi al "caso indipendente dal parametro α".

Proposizione 2. Supponiamo $\varepsilon>0$, $R^m \supset C$ chiuso,

$$C+\varepsilon\bar{B} \ni x \to \Gamma(x) \neq 0 \text{ compatto convesso } \subset R^m,$$

Γ superiormente semicontinua. Sia $x_j(\cdot) \in W(0,T_j;R^m)$ tale che $T_j \to T>0$ per $j\to\infty$ e

i) $x_j(t) \in C$ per $0\leq t\leq T_j$;

ii) esiste una costante $M>0$ tale che

$$\Gamma(x_j(t)) \subset M\bar{B}\ ,\ |\dot{x}_j(t)| \leq M \quad \text{per} \quad 0\leq t\leq T_j$$

iii) esistono $\tau_j(\cdot):[0,T_j] \to R$ misurabili tali che

$$\dot{x}_j(t) \in \Gamma(x_j(t)) + \tau_j(t)B \quad \text{q.d.},$$

$$\sup_{0\leq t\leq T_j} |\tau_j(t)| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$$

iv) $\sup_{j\geq 1} |x_j(0)|<\infty$.

Allora esistono $x(\cdot) \in W(0,T;R^m)$ e una sottosuccessione, che indichiamo ancora con $j\to x_j(\cdot)$ e che, se $T_j<T$, verifica la condizione $x_j(t)=x_j(T_j)$ per $T_j\leq t\leq T$, tali che

$$x_j(t) \xrightarrow[j\to\infty]{} x(t) \text{ uniformemente su } [0,T],$$

$$\dot{x}(t) \in \Gamma(x(t)) \text{ q.d.}$$

Proposizione 3. Consideriamo il problema

$$\min\{f(T,y(T))\,|\,y(\cdot)\in W(0,T;X),\ \ \dot y(t)\in F(y(t))\ \text{q.d.},\ y(0)\in C_0\ ,\ (T,y(T))\in S\}$$

in cui supponiamo C_0 compatto, S chiuso in $R\times R^n$, f localmente lipschitziana su S e supponiamo che per F valgano le condizioni (H1), (H2), (H3) (senza dipendenza da α). Se $x(\cdot)\in W(0,T;\text{int }X)$ è una soluzione del problema, per ogni r>0 abbastanza grande esistono $\lambda\in\{0,1\}$ e $p(\cdot)\in W(0,T;R^n)$ tali che

0) $\lambda+\max\limits_t |p(t)| > 0$,

1) $(-\dot p(t),\dot x(t))\in\partial H(x(t),p(t))$, q.d.,

2) $H(x(t),p(t)) = h$ costante per $0\leq t\leq T$,

3) $p(0)\in r\partial\rho_{C_0}(x(0))$,

4) $(h,-p(T))\in\lambda\partial f(T,x(T))+r\partial\rho_S(T,x(T))$

Questo segue dal Corollario al Teorema 3.6.1 di [1].

Dalla Proposizione 2 segue che esistono $T_0>0$ e $\delta>0$, con $\delta\leq\varepsilon$, tali che

i) se $|\alpha|<\delta$ e $x(\cdot)\in W(0,T;R^n)$ è ammissibile per (P_α), allora $T\geq T_0$;

ii) se $|\alpha|<\delta$ e $V(\alpha)<V(0)+\delta$, allora per ogni soluzione $x(\cdot)$ di (P_α) si ha $x(t)\in\text{int }X$ per ogni t;

iii) la funzione V è inferiormente semicontinua per $|\alpha|<\delta$.

Oltre che sulle proposizioni enunciate, la dimostrazione del Teorema 1 si fonda sui lemmi che seguono.

Lemma 1. Sia $|\alpha|<\delta$, $(\alpha,v)\in \mathrm{epi}V$, $V(\alpha)\leq v<V(0)+\delta$ e sia

$$(0,0)\neq(\beta,-u)\in PN_{\mathrm{epi}V}(\alpha,v)$$

Allora esiste $x(\cdot)\in W(0,T;\ \mathrm{int}\ X)$ soluzione di (P_α) e per ogni $r>0$ abbastanza grande esistono $\lambda\in\{0,1\}$, $(p(\cdot),q(\cdot))\in W(0,T;R^n xR^n)$ tali che

$$\lambda+\max_t|(p(t),q(t))|>0,$$

a) $(-\dot{p}(t),-\dot{q}(t),\ \dot{x}(t))\in\partial H(x(t),\alpha,p(t))$ q.d.,

b) $H(x(t),\alpha,p(t)) = h$ costante per $0\leq t\leq T$;

c) $(h,p(0),-\dot{p}(T),-q(T))\in\lambda u\partial f(T,x(0),x(T),\alpha)+\ r\partial\rho_S(T,x(0),x(T),\alpha)$;

d) $q(0) = -\lambda\beta$.

Infatti segue dalla Proposizione 2 che esiste una soluzione $x(\cdot)\in W(0,T;\mathrm{int}\ X)$ per (P_α). Se $|\alpha'|<\delta$ e $y(\cdot)\in W(0,T';X)$ è ammissibile per $(P_{\alpha'})$, si ha

$$V(\alpha')\leq f(T',y(0),\ y(T'),\alpha')\leq$$

$$\leq f(T',y(0),y(T'),\ \alpha')+v-f(T,x(0),x(T),\alpha) = r'$$

e quindi $(\alpha',r')\in \mathrm{epi}V$. Ora dalla definizione di PN_{epiv} segue, per un $M>0$,

$$<(\beta,-u),(\alpha',r')-(\alpha,v)> \leqq M|(\alpha'-\alpha,r'-v)|^2,$$

$$uf(T,x(0),x(T),\alpha)-<\beta,\alpha> \leqq uf(T',y(0),y(T'),\alpha')-<\beta,\alpha'> +$$

$$+M|(\alpha'-\alpha,f(T',y(0),y(T'),\alpha')-f(T,x(0),x(T),\alpha))|^2 =$$

$$= uf(T',y(0),y(T'),\alpha')-<\alpha',\beta> + g(T',y(0),y(T'),\alpha')$$

Osserviamo ora, seguendo [2], che si ha

$$uf(T,x(0),x(T),\alpha)-<\alpha,\beta> =$$

$$= \min\{uf(T',y_0(T'),y(T'),z(T'))-<z_0(T'),\beta>+g(T',y_0(T'),y(T'),z(T'))|$$

$$(\dot{y}_0(t),\dot{y}(t),\ {}_0(t),\ (t))\quad \{0\}xF(y(t),z(t))x\{0\}x\{0\} \quad .d.,$$

$$(y_0(\cdot),\ y(\cdot),\ z_0(\cdot),\ z(\cdot)) \in W(0,T';XxX \times \delta B \times \delta B),$$

$$y_0(0) = y(0),\ z_0(0) = z(0),\ |y_0(0)| \leqq M_0, |z_0(0)| \leqq \delta,$$

$$(T',y_0(T'),y(T'),\ z(T')) \in S\},$$

con una costante $M_0 > |x(0)|$, che esiste a causa della condizione (H4).

Ora possiamo applicare la Proposizione 3 con

$$\tilde{y} = (y_0,y,z_0,z) \in R^n x R^n x R^m x R^m,$$

$$\tilde{F}(\tilde{y}) = \{0\}xF(y,z)x\{0\}x\{0\},$$

$$\tilde{p} = (p_0,p,q_0,q),$$

$$\tilde{H}(\tilde{y},\tilde{p}) = H(y,z,p),$$

$$\tilde{f}(t,\tilde{y}) = uf(t,y_0,y,z)-\langle z_0,\beta\rangle + g(t,y_0,y,z),$$

$$\tilde{C}_0 = \{\tilde{y}|y_0=y,z_0=z,\ |y_0|\leq M_0,\ |z_0|\leq\delta\},$$

$$\tilde{S} = \{t,\tilde{y})|(t,y_0,y,z)\in S,\ z_0\in R^m\},$$

$$\tilde{x}(t) = (x(0),x(t),\alpha,\alpha),\ 0\leq t\leq T.$$

Allora per ogni $r>0$ abbastanza grande esistono $\lambda\in\{0,1\}$ e $\tilde{p}(\cdot)\in W(0,T;R^n xR^n xR^m xR^m)$ tali che

$$\lambda + \max_t|\tilde{p}(t)|>0$$

e che siano verificate inoltre le condizioni i)-v) che seguono.

i) $(-\dot{p}_0(t),-\dot{p}(t),-\dot{q}_0(t)-\dot{q}(t),0,\dot{x}(t),0,0)\in\partial[(\tilde{y},\tilde{p}) \to H(y,z,p)](\tilde{x}(t),\tilde{p}(t))$ q.d.

Siccome H non dipende da y_0,z_0,p_0,q_0,q, si ha di qui

$$(-\dot{p}_0(t),\ -\dot{q}_0(t),0,0,0) = (0,0,0,0,0,0,),$$

$$(-\dot{p}(t),-\dot{q}(t),\dot{x}(t))\in\partial H(x(t),\alpha,p(t))\quad \text{q.d.},$$

e questo prova a) e inoltre

$$p_0(t) = p_0 \text{ costante},\quad q_0(t) = q_0 \text{ costante}.$$

ii) $\tilde{H}(\tilde{x}(t),\tilde{p}(t)) = H(x(t),\alpha,p(t)) = h$ costante.

iii) $(p_0(0),p(0),q_0(0),q(0)) \in r\partial\rho_{\tilde{C}_0}(r(0),x(0),\alpha,\alpha)$

Ora si ha, se $\tilde{y}$ è tale che $|y_0|,|y|<M_0$ e $|z_0|,|z|<\delta$, $\rho_{\tilde{C}_0}(\tilde{y}) = \frac{1}{\sqrt{2}}|(y-y_0,z-z_0)|$

Se $\tilde{y} \notin \tilde{C}_0$ si ha quindi

$$(\text{grad}\ \rho_{\tilde{C}_0})(\tilde{y}) = \frac{1}{\sqrt{2}|(y-y_0,z-z_0)|}(y_0-y,y-y_0,z_0-z,z-z_0),$$

e di qui segue (cfr. [1]).

$$\partial\rho_{\tilde{C}_0}(x(o),x(o),\alpha,\alpha) = \{(a,-a,b,-b)\,\big|\,|(a,b)|\leq 1\}$$

Dunque da iii) segue

$$p(0) = -p_0(0),\ q(0) = -q_0(0).$$

iv) $(h,-p_0(T),-p(T),-q_0(T),-q(T)) \in \lambda\partial\tilde{f}(T,\tilde{x}(T)) + r\partial\rho_{\tilde{S}}(T,\tilde{x}(T)).$

Ora si ha

$$\rho_{\tilde{S}}(t,\tilde{y}) = \rho_S(t,y_0,y,z),\quad \text{indipendente da } z_0,$$

e quindi

$$(\tau,\eta_0,\eta,\zeta_0,\zeta) \in \partial\rho_{\tilde{S}}(T,\tilde{x}(T)) \Rightarrow$$

$$(\tau,\eta_0,\eta,\zeta) \in \partial\rho_S(T,x(0),\eta(t)\ \alpha),$$

$$\zeta_0=0.$$

Si ha poi, per la regolarità della funzione

$$(t,\tilde{b}) \to -\langle z_0,\beta\rangle + g(t,y_0,y,z)$$

in $(T,\tilde{x}(T))$

$$\partial\tilde{f}(T,\tilde{x}(T)) = \partial\,[(t,\tilde{y}) \to uf(t,y_0,y,z)](T,\tilde{x}(T)) + (0,0,0,-\beta,0)$$

e quindi

$$(\eta',\eta_0',\eta,\zeta_0',\zeta') \in \partial\tilde{f}(T,\tilde{x}(T))$$

$$(\tau',\eta_0',\eta',\zeta') \in u\partial f(T,x(0),x(T),\alpha),\ \zeta_0' = -\beta$$

Dunque da iv) si ottiene

$$-q_0(T) = -\lambda\beta,$$

$$(h,-p_0(T),-p(T),-q(T)) \in \lambda u\partial f(T,x(0),x(T),\alpha) +$$

$$+ r\partial\rho_S(T,x(0),x(T),\alpha)$$

e di qui, ricordando iii) e la costanza di $p_0(\cdot)$ e $p_0(\cdot)$, si ottiene

$$q(0) = -\lambda\beta,$$

$$(h,p(0),-p(T),-q(T)) \in \lambda u\partial f(T,x(o),x(T);\alpha) + r\partial\rho_S(T,x(o),x(T),\alpha)$$

e questo prova c) e d).

Infine, se $\lambda=0$, deve essere $\max|\tilde{p}(t)|>0$ e di qui segue

$$0 \neq \tilde{p}(0) = (-p(0),p(0),0,0) \Rightarrow p(0) \neq 0$$

e quindi in ogni caso si ha

$$\lambda + \max_t |(p(t),q(t))| > 0.$$

Osserviamo che, se $\alpha=0$ e $v=V(0)$, la condizione $\lambda=0$ è incompatibile cui la condizione (H9), secondo la quale si ha

$$\lambda=0,\ q(0)=0 \Rightarrow p(t) = 0 \text{ per ogni } t.$$

Dunque in questo caso vale il Lemma 1 con $\lambda=1$. Il lemma che segue afferma che questo è ancora vero per i vettori

$$(0,0) \neq (\beta_0,-u_0) = \lim_{i\to\infty} (\beta_i,-u_i),$$

con $0\neq(\beta_i,-u_i)\in PN_{epiV}(\alpha_i,v_i)$, $(\alpha_i,v_i) \to (0,V(0))$.

<u>Lemma 2.</u> Esistono $x(\cdot)\in W(0,T;\text{int } X)$ soluzione di (Po) e $(p(\cdot),q(\cdot))\in W(0,T;R^n x R^m)$ tali che

a) $(-\dot{p}(t),-\dot{q}(t),\dot{x}(t)\in\partial H(x(t),0,p(t))$, q.d.,

b) $H(x(t),0,p(t)) = h$ costante per $0\leq t\leq T$,

c) $(h,p(0), -p(T),-q(T))\in u_0\partial f(T, x(0),x(T),0) + N_S(T,x(0),x(T),0)$,

d) $q(0) = -\beta$.

La dimostrazione si ottiene dal Lemma 1 e dalla Proposizione 2 (cfr. [2]).

Osserviamo che, se $(\beta_0,-u_0) = (0,0)$, il Lemma 2 è verificato dalle funzioni

$$p(t) = 0 \ , \quad q(t) = 0 \quad \text{per } 0 \le t \le T.$$

Poniamo

$$\mathbf{C} = \{(\beta, r) \in R^n x]-\infty, 0] \mid \beta \in Q[M^{-r}(Y)]\}$$

$$\mathbf{N} = N_{epiV}(0, V(o)).$$

Allora si ha il seguente

Lemma 3. **C** è un cono contenuto in $R^n x]-\infty,0]$ contenente l'origine e tale che

i) **C** è chiuso;

ii) $\mathbf{N} = \overline{\text{conv}}(\mathbf{C} \cap \mathbf{N})$;

iii) se $Q[M^o(Y)]$ è puntato, allora anche **C** e **C** $\cap$ **N** sono puntati e si ha

$$\mathbf{N} = \text{conv}(\mathbf{C} \cap \mathbf{N})$$

Per provare che C è un cono basta osservare che dalla definizione di $M^\lambda(Y)$ si ha per ogni $t > 0$

$$(p(\cdot), q(\cdot)) \in M^\lambda(X(\cdot)) \Rightarrow (tp(\cdot), tp(\cdot)) \in M^{t\lambda}(x(\cdot)).$$

Si prova che **C** è chiuso usando la Proposizione 2. Ogni coppia $(\beta_o, -u_o)$ considerata nel Lemma 2 appartiene sia a **C** che a **N** e quindi dalla definizione di **N** si ottiene

$$\mathbf{N} \subset \overline{\text{conv}}\ (\mathbf{C} \cap \mathbf{N}) \subset \mathbf{N}.$$

Si ha

$$Q[M^{o}(Y)] \times \{0\} = \mathbf{C}\cap(R^n \times \{0\})$$

e quindi $C\cap(R^n x\{0\})$ è puntato. Di qui segue che $\mathbf{C}$ è puntato. Infatti, se $(\beta_i,-u_i)\in\mathbf{C}$, $u_i \geqq 0$ e

$$(0,0) = \sum_1^m (\beta_i,-u_i) = (\sum_i^m \beta_i, -\sum_i^m u_i),$$

si ha $u_i \equiv 0$ e quindi $(\beta_i,-u_i)\in\mathbf{C}\cap(R^n x\{0\})$ e allora anche $\beta_i \equiv 0$.

Ne segue che anche $\mathbf{C}\cap\mathbf{N}$ è puntato. Siccome $\mathbf{C}\cap\mathbf{N}$ è anche chiuso, si può concludere (cfr. [4],[5]) che conv($\mathbf{C}\cap\mathbf{N}$) è chiuso.

Ora si può ottenere la dimostrazione del Teorema 1 osservando che

$$\partial V(0) \times \{-1\} = \mathbf{N}\cap(R^n x\{-1\}),$$

$$\partial^{\infty} V(0) \times \{0\} = \mathbf{N}\cap(R^n x\{0\}),$$

applicando il Lemma 3 e il seguente lemma di Rockafellar [4]

<u>Lemma 4.</u> Sia $(0,0)\in K$ = cono $\subset R^n x]-\infty,0]$. Allora si ha

i) $(R^n x\{-1\})\cap \mathrm{conv}(K) = \mathrm{conv}(K\cap(R^n x)-1\}) + K\cap(R^n x\{0\}))$,

ii) $(R^n x\{0\})\cap \mathrm{conv}(K) = \mathrm{conv}(K\cap(R^n x\{0\}))$,

iii) $\overline{(R^n x\{-1\})\cap \mathrm{conv}(K)} = (R^n x\{-1\})\cap \overline{\mathrm{conv}}(K)$

Si ha infatti

$$\partial V(0)x\{-1\} = \mathbf{N}\cap(R^n x\{-1\}) = \overline{\text{conv}}\,(\mathbf{C}\cap\mathbf{N})\cap(R^n x\{-1\}) =$$

$$= \overline{(R^n x\{-1\})\cap\text{conv}(\mathbf{C}\cap\mathbf{N})} = \overline{\text{conv}}((R^n\{-1\})\cap\mathbf{C}\cap\mathbf{N} + (R^n x\{0\})\cap\mathbf{C}\cap\mathbf{N})$$

e quindi, posto

$$R^n x R \ni (x,r) \xrightarrow{\phi} x \in R^n,$$

siccome ϕ è lineare e $\phi_{|R^n x\{-1\}}$ è un omeomorfismo, si ha

$$\partial V(0) = \phi(\,V(0)\; x\{-1\}) =$$

$$= \overline{\text{conv}}(\phi((R^n x\{-1\})\cap\mathbf{C})\cap\phi((R^n x\{-1\})\cap\mathbf{N})+\phi((R^n x\{0\})\cap\mathbf{C})\quad\phi((R^n x\{0\})\cap\mathbf{N}))$$

$$= \overline{\text{conv}}(Q[M^1(Y)]\cap\partial V(0) + Q[M^0(Y)]\cap\partial^\infty V(0))$$

Se $Q[M^0(Y)]$ è puntato, nelle formule precedenti si può omettere la chiusura.

Consideriamo ora il problema

$$T(\alpha)=\min\{T|x(\cdot)\in W(0,T;X);\dot{x}(t)\in F(x(t))\text{ q.d., } x(0) = \alpha\;,\; x(T) = 0\},$$

dove, al solito, poniamo $T(\alpha) = \inf\{\ldots\}$ se il minimo non esiste. Se $\alpha_0 \neq 0$ e $x_0(\cdot)$ è una soluzione in α_0, allora si ha, se $M>T(\alpha_0)$,

$$\infty>T(\alpha_0)=\min\{T|x(\cdot)\in W(0,T;X),\;\dot{x}(t)\in F(x(t))\text{ q.d., } x(0) = \alpha_0, x(T)=0,\; 0\leq T\leq M\}$$

Ora si può applicare il Teorema 1 con

$$S = \{(t,\alpha_0+\alpha,0,\alpha) \mid 0\leq t\leq M,\ |\alpha|\leq 1\},$$

$$V(\alpha) = T(\alpha_0+\alpha).$$

Se $0<t<M$ e $|\alpha|<1$ si ha

$$N_S(t,\alpha_0+\alpha,0,\alpha) = \{(0,\beta,\gamma,-\beta) \mid \beta,\gamma\in R^n\}$$

e quindi sono verificate le condizioni (H4), (H6), (H8). Esaminiamo la condizione (H9). Sia $x(\cdot)\in W(0,T;\ \mathrm{int}\ X)$ ammissibile per il nostro problema e sia $(p(\cdot),q(\cdot))\in M^\lambda(x(\cdot))$. Allora si ha

$$(-\dot p(t),\ -\dot q(t),\ \dot x(t))\in\partial H(x(t),\ p(t)) \quad \text{q.d.},$$

$$H(x(t),\ p(t)) = h \text{ costante per } 0\leq t\leq T,$$

$$(h,p(0),-p(T),-q(T))\in\lambda(1,0,0,0)+\{(0,\beta,\gamma,-\beta) \mid \beta,\ \gamma\in R^n\}$$

Dall'ultima condizione segue

$$h = \lambda, \quad -q(T) = -p(0)$$

e dalla prima condizione segue

$$-\dot q(t) = 0 \quad \text{q.d.} \quad , \quad (-\dot p(t),\ \dot x(t))\in\partial H(x(t),p(t))$$

e quindi si ha $q(t)$ = costante e

$$\text{(Q1)} \qquad (-\dot p(t),\ \dot x(t))\in\partial H(x(t),p(t)) \quad \text{q.d.},$$

(Q2) $\quad H(x(t),p(t)) = \lambda \quad$ per $\quad 0 \leq t \leq T$,

$$-q(0) = -p(0),$$

$$Q[M^{\lambda}(x(\cdot))] = \{-p(0) | p(\cdot) \text{ verifica (Q1) e (Q2)}\}$$

Dunque ora si ha, dal lemma di Gronwall,

$$q(0) = 0 \Rightarrow p(0) = 0 = p(t) \quad \text{per} \quad 0 \leq t \leq T$$

e quindi vale anche la condizione (H9). Pertanto dal Teorema 1 segue il

Teorema 2. Se $\alpha_0 \neq 0$ e se sono soddisfatte le condizioni (H1), (H2), (H3), (H7), la funzione $T(\cdot)$ è inferiormente semicontinua in un intorno di α_0 e si ha

$$\partial T(\alpha_0) = \overline{\text{conv}}\{Q[M^1(Y)] \cap \partial T(\alpha_0) + Q[M^0(Y)] \cap \partial^{\infty} T(\alpha_0)\}.$$

Se $Q[M^0(Y)]$ è puntato si può omettere la chiusura e si ha inoltre

$$\partial^{\infty} T(\alpha_0) = \text{conv}[Q[M^0(Y)] \cap \partial^{\infty} T(\alpha_0)\}$$

Introduciamo ora per il nostro problema il concetto di normalità.

Definizione. Se $z(\cdot)$ è un arco ammissibile per il problema $T(\alpha_0) = \min\{\ldots\}$, si dice che $x(\cdot)$ è *normale* se $Q[M^0(x(\cdot))] = \{0\}$ e si dice che il *problema è normale* in α_0 se $Q[M^0(Y)] = \{0\}$. Se $0 \in F(0)$, si dice che l'*origine è normale* se per ogni $T>0$ abbastanza piccolo l'arco

$$[0,T] \ni t \to 0$$

è normale, ossia se l'unica funzione $p(\cdot)\in W(0,T;R^n)$ verificante le condizioni

$$(-\dot{p}(t),0)\in\partial H(0;p(t)) \quad \text{q.d.},$$

$$H(0,p(t)) = 0 \quad \text{per} \quad 0\leq t\leq T$$

è la funzione identicamente nulla.

Si hanno i seguenti corollari del Teorema 2.

Corollario 1. Se $\alpha_0\neq 0$ e il problema $T(\alpha_0) = \min\{\ldots\}$ è normale, allora T è lipschitziana in un intorno di α_0 e si ha

$$\partial T(\alpha_0)\subset Q[M^1(Y)].$$

Corollario 2. Sia $0\in \mathrm{int}F(0)$. Allora l'origine è normale e $T(\cdot)$ è lipschitziana in un intorno di 0.

Infatti esiste $\delta>0$ tale che $F(0)\supset\delta\bar{B}$ e quindi

$$0 = H(0,p(t)) = \max_{u\in F(0)} \langle p(t),u\rangle \geq \max_{|u|\leq 1} \langle p(t),\delta u\rangle = \delta|p(t)| \Rightarrow p(t)=0 \quad \text{per} \quad 0\leq t\leq T.$$

Dunque l'origine è normale.

Da (H1) e (H2) segue che si ha, per certe costanti $\delta'>0$ e $r>0$,

$$|x| \leq r \Rightarrow F(x)\supset\delta' B$$

Se $0<|\alpha_0|\leq r$, se $x(\cdot)$ è ammissibile in α_0 e $p(\cdot)\in M^\lambda(x(\cdot))$, si ha

$$H(\alpha_0,p(0)) = \lambda.$$

Per $\lambda=0$ si ottiene

$$0 = \max_{u \in F(\alpha_0)} \langle p(0),u \rangle \geq \max_{|u|\leq 1} \langle p(0),\delta' u \rangle = \delta' |p(0)| \Rightarrow p(0) = 0$$

e questo prova che il problema è normale in α_0. Per $\lambda=1$ si ha

$$1 = H(\alpha_0,p(0)) = \max_{u \in F(\alpha_0)} \langle p(0),u \rangle \geq \delta' |p(0)| \Rightarrow |p(0)| \leq \frac{1}{\delta'} = M'$$

e quindi segue dal Corollario 1

$$\partial T(\alpha_0) \subset M'\bar{B} \quad \text{per} \quad 0 < |\alpha_0| \leq r.$$

Dal successivo Teorema 3 segue che $T(\cdot)$ è continua in 0 e quindi si può concludere che $T(\cdot)$ è lipschitziana per $|\alpha_0| \leq r$ con costante di Lipschitz M'.

<u>Teorema 3.</u> Nelle ipotesi del Teorema 2, se l'origine è normale, allora $T(\cdot)$ è finita e continua in un intorno di 0.

Dall'ipotesi di normalità segue che esiste $T_0 > 0$ tale che per ogni $\tau \in]0,T_0]$ l'unica soluzione $p(\cdot) \in W(0,\tau;R^n)$ del sistema

$$(-\dot{p}(t),0) \in \partial H(0,p(t)) \quad \text{q.d.},$$

$$H(0,p(t)) = 0 \quad \text{per } 0 \leq t \leq \tau$$

è dato da $p(t) \equiv 0$.

Fissiamo $\tau \in]0,T_0]$ e consideriamo il problema

$$W(\alpha) = \min\{(T-\tau)^2 + \int_0^T |y(t)|^2 \, dt \,\Big|\, y(\cdot) \in W(0,T;X), \ \dot{y}(t) \in F(y(t)) \ \text{q.d.},$$

$$y(0) = \alpha, \ y(T) = 0, \ \frac{1}{2}\tau \leq T \leq 2\tau\}, \ |\alpha| \leq 1.$$

Per $\alpha=0$ l'unica soluzione è data da

$$y_0(t) = 0 \quad \text{per} \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

Trasformiamo il problema in modo da potere applicare il Teorema 1. Si ha

$$W(\alpha)=\min\{(T-\tau)^2+z(T) \mid (y(\cdot),z(\cdot)) \in W(0,T;X \times R),$$

$$(\dot{y}(t),\dot{z}(t)) \in F(y(t)) \times \{|y(t)|^2\} \quad \text{q.d.},$$

$$(y(0),z(0)) = (\alpha,0),(y(T),z(T)) \in \{0\} \times R, \ \frac{1}{2}\tau \leq T \leq 2\tau\}$$

e ora si può applicare il Teorema 1 con

$$\tilde{y} = (y,z) \in R^n \times R, \quad \tilde{p} = (p,r) \in R^n \times R, \ldots,$$

$$\tilde{S} = \{(t,\tilde{y},\tilde{y}_1,\alpha) \mid \frac{1}{2}\tau \leq t \leq 2\tau, \ \tilde{y} = (\alpha,0), \ \tilde{y}_1 = (0,1), \ s \in R, \ |\alpha| \leq 1\}$$

Ora si ha per questo problema

$$Y = \{y_0(\cdot)\} \ , \ Q[M^0(y_0(\cdot))] = \{0\} \ , \ \partial^\infty W(0) = \{0\}$$

e quindi $W(\cdot)$ è finita e lipschitziana in un intorno di 0. Ossia si ha, per un $\delta(\tau)>0$,

$$|\alpha| \leq \delta(\tau) \Rightarrow \exists y_\alpha(\cdot) \in W(0,T_\alpha;\text{int } X): \ W(\alpha) = (T_\alpha-\tau)^2+y_\alpha(T\alpha)$$

e quindi, per la Proposizione 2, esiste

$$T(\alpha) \leq T_\alpha \leq 2\tau$$

Questo è vero per ogni $\tau>0$ abbastanza piccolo e quindi è provata la continuità

in 0 di $T(\cdot)$.

Dal Teorema 3 si può ottenere un classico risultato di controllabilità per sistemi lineari del tipo

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)) = \{\phi(x(t)) + Bu \mid u \in U\}$$

Si ha infatti

Corollario 1. Supponiamo $U \subset R^m$ compatto, convesso e $0 \in \text{int } U$; $\phi: R^n \to R^n$ di classe C^1, $\phi(0) = 0$, $|\phi(x)| \leq k|x| + c$ per certe costanti k e c; B = matrice nxm. Poniamo $A = D\phi(0)$ e

$$C = \| B \quad AB \quad A^2B \ldots A^{n-1}B \|$$

Allora C ha caratteristica n se e solo se l'origine è normale e, quando questo è vero, $T(\cdot)$ è finita e continua in 0.

Si ha infatti

$$H(x,p) = \langle \phi(x), p \rangle + \max_{u \in U} (p, Bu)$$

e dalla condizione

$$(-\dot{p}(t), 0) \in \partial H(0, p(t)) \quad \text{per} \quad 0 \leq t \leq T \quad (\text{q.d.})$$

segue

$$-\dot{p}(t) = A^* p(t) \quad \text{q.d.}$$

e quindi

$$p(t) = e^{-tA^*} p(0) \quad \text{per} \quad 0 \leq t \leq T.$$

Dalla condizione

$$0 = H(0,p(t)) = \max_{u\in U} \langle p(t),Bu\rangle = \max_{u\in U} \langle B^* p(t),u\rangle$$

segue, ricordando che $0 \in \mathrm{int}U$,

$$B^*p(t) = 0 \quad \text{per} \quad 0\leq t\leq T.$$

Se $T>0$, dalla condizione

$$0 \equiv B^* e^{-tA^*} p(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} B^*A^{*k}p(0)$$

segue

$$0 = B^*A^{*k}p(0) = p(0) \quad A^kB \qquad \text{per } k\geq 0$$

e quindi

$$p(0)C = 0$$

Dunque, se $p(0) \neq 0$, C ha caratteristica $<n$. Pertanto si è ottenuto che, se l'origine non è normale, allora C ha caratteristica $< n$. Viceversa, se C ha caratteristica $< n$, esiste $p_0 \neq 0$ tale che

$$p_0 \cdot C = 0$$

e di qui segue, per il teorema di Hamilton sulle matrici,

$$p_0A^kB = 0 \qquad \text{per} \quad k \geq 0,$$

$$B^* e^{-tA^*} p_0 = 0 \quad \text{per} \quad t \in R$$

e quindi, ponendo

$$p(t) = e^{-tA^*} p_0,$$

si ottiene che l'origine non è normale.

Terminiamo con alcuni esempi.

Esempio 1. Poniamo

$$F(x_1,x_2) = \{(\theta(x_2) + u_1, u_2) \,\big|\, |u_i| \leq 1\},$$

con $\theta \in C^1(R)$ tale che $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta(t) = 1$ per $t \leq 1$, $\theta(t) = 0$ per $t \geq 2$.
Per ogni punto del piano esiste una traiettoria $x(\cdot)$ tale che

$$x(0) = \alpha, \ \dot{x}(t) \in F(x(t)) \text{ per } 0 \leq t \leq T, \ x(T) = (0,0)$$

e quindi l'origine è controllabile ed esiste

$$T(\alpha) = \min\{T \,|\, x(\cdot) \in W(0,T;R^2), \ \dot{x}(t) \in F(x(t)) \text{ q.d.},$$

$$x(0) = \alpha \ , \ \ x(T) = 0\} < \infty$$

Proviamo che $T(\cdot)$ è discontinua in $(0,0)$.
Sia $\varepsilon > 0$. La traiettoria

$$x(t) = (t-\varepsilon, 0), \ 0 \leq t \leq \varepsilon,$$

congiunge $(-\varepsilon, 0)$ con $(0,0)$ e quindi si ha

$T(-\varepsilon,0) \leqq \varepsilon.$

Supposto che il minimo $T(\varepsilon,0)$ venga assunto nella traiettoria $x_0(\cdot)$, non può essere $x_{02}(t) < 1$ per $0 \leqq t \leqq T(\ ,0)$, poiché si avrebbe $\dot{x}_{01}(t) \geqq 0$ e quindi $x_{01}(t) \geqq \varepsilon$ per ogni t. Dunque esiste

$$\min\{t \geqq 0 | x_{02}(t) \geqq 1\} = t_1 \geqq$$

$$\geqq \min\{T | y(\cdot) \in W(0,T;R^2),\ \dot{y}(t) \in F(y(t)) \text{ q.d.},\ y(0) = (\varepsilon,0),$$

$$y_2(T) \geqq 1\} = T_1$$

Se il tempo minimo T_1 è assunto lungo la traiettoria $y(\cdot)$, allora si ha

$$y_2(t) < 1 \quad \text{per} \quad 0 \leqq t < T_1, \quad y_2(T_1) = 1$$

e segue dalla Proposizione 3, con

$$S = R \times C, \quad C = \{(x_1,x_2) \in R^2 | x_2 \geqq 1\}, H(x,p) = \theta(x_2)p_1 + |p_1| + |p_2|,$$

che esistono $\lambda \in \{0,1\}$ e $p(\cdot) \in W(0,T_1;R^2)$ tali che

0) $\lambda + \max_t |p(t)| > 0;$

1) $(-\dot{p}_1(t),\ -\dot{p}_2(t),\ \dot{y}_1(t),\ \dot{y}_2(t)) \in \partial H(y(t),\ p(t))$ q.d.,

e quindi

$$(-\dot{p}_1(t),\ -\dot{p}_2(t)) = (0, \dot{\theta}(y_2(t))p_1(t)),$$

$$(\dot{y}_1(t), \dot{y}_2(t)) \in \partial_\rho(|p_1|+|p_2|)$$

e ancora, poichè $y_2(t) < 1$ e $\theta(y_2(t)) = 0$,

$$p_1(t) = p_1 \text{ costante,}$$

$$-\dot{p}_2(t) = 0 \ , \quad p_2(t) = p_2 \text{ costante;}$$

2) $h = H(y(t),p(t)) = p_1 + |p_1|+|p_2|$,

3) $(h,-p_1,-p_2) = \lambda(1,0,0) + r(0,0,-1) \ , \quad r \geq 0$,

e quindi si ha $h = \lambda$, $p_1=0$, $p_2=r$. Da 0) si ha

$$0<h + |p_2|=2|p_2|=2r \qquad r > 0$$

e ora da 1) segue

$$\dot{y}_2(t) = 1 \ , \quad y_2(t) = t \quad \text{per} \quad 0\leq t\leq T_1$$

e di qui segue

$$1 = T_1 \leq t_1 \leq T(\varepsilon,0)$$

per ogni $\varepsilon>0$.

<u>Esempio 2.</u> Poniamo

$$F(x_1,x_2) = \{(x_2,u) \big| |x|\leq 1\}$$

Allora si verifica che l'origine è normale e quindi la funzione $T(\cdot)$ relativa a F

è continua in (0,0), per il Teorema 3. Tuttavia non è lipschitziana in un intorno di (0,0), come si vede dalla sua espressione

$$T(\alpha_1,\alpha_2)=\begin{cases} -\alpha_2 + (2\alpha_2^2 - 4\alpha_1)^{1/2} & \text{per } 2\alpha_1 \leqq \alpha_2|\alpha_2|, \\ \alpha_2 + (2\alpha_2^2 + 4\alpha_1)^{1/2} & \text{per } 2\alpha_1 \geqq -\alpha_2|\alpha_2| \end{cases}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] CLARKE F.H.: Optimization and nonsmooth analysis. Wiley-Interscience, New York, 1983.

[2] CLARKE F.H.-LOEWEN P.D.: The value function in optimal control: sensitivity, controllability, and time-optimality. SIAM J. Control and Optim. 24, 2 (1986), 243-63.

[3] LOEWEN P.D.: The proximal normal formula in Hilbert space. Nonlin. Anal. Theory, Methods, Applications, 11, 9 (1987), 979-95.

[4] ROCKAFELLAR R.T.: Lagrange multipliers and subderivatives of optimal value functions in nonlinear programming. Math. Prog. Studies 17 (1982), 28-66.